# Caos determinista, con lápiz y papel

**Luis Benet**
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM
Miembro de la Academia de Ciencias de Morelos A.C.

Uno de los objetivos de ciencias como la Física es encontrar y entender las leyes que determinan los fenómenos naturales. Estas leyes son las reglas que dictan la dinámica de los sistemas físicos. En este sentido hablamos de relaciones de causa y efecto y de la formulación de predicciones claras, donde no hay nada que sea azaroso. Quizás el mejor ejemplo de este pensamiento es la visión de principios del siglo XIX de Pierre-Simon Laplace sobre la Mecánica Analítica (hoy llamada Mecánica Clásica), quien escribió: "...debemos entonces considerar al estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del que le seguirá. Una inteligencia que, en un instante dado, conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza, y la situación respectiva de los seres que la componen, y si además fuera suficientemente vasta para someter esos datos al análisis, abarcaría en una misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del Universo y del átomo más ligero: nada sería incierto para ella y el futuro, como el pasado, serían presentes a sus ojos." [1]. Tomemos como ejemplo un volado: si uno conoce las condiciones iniciales de un sistema, esto es, todas aquellas variables que definen el lanzamiento de la moneda (posición de la moneda en el dedo, orientación de la moneda, distribución de la masa en la moneda, impulso inicial, altura, posición en la Tierra, condiciones meteorológicas, etc.), y uno conoce las fuerzas que definen el movimiento, entonces uno puede predecir con certeza absoluta cuál será el resultado. Esto es el determinismo.

**¿El principio determina el final de un fenómeno?**

Siendo realistas y humildes debemos reconocer que no somos esa inteligencia privilegiada de la que habla Laplace, y que no tenemos tampoco capacidades infinitas, así que los cálculos, modelos y predicciones que podemos plantear tienen limitaciones. Esto llevó a nuestro personaje a formular preguntas relacionadas con las consecuencias que debería haber de tener pequeñas variaciones de las condiciones iniciales, es decir, qué pasaría si las condiciones iniciales hubieran sido ligeramente diferentes a las que pensamos que fueron; más tarde se considerarían las imprecisiones de parámetros en los modelos y cambios del propio modelo. Fue así que se comenzó a estudiar el papel del estado inicial de un sistema en su evolución. En particular, el interés se centró en la estabilidad del Sistema Solar. A fines del siglo XIX y principios del siglo XX, otro matemático francés, Henri Poincaré, mostraría que variaciones en las condiciones iniciales pueden generar una evolución temporal muy distinta, por lo que las predicciones dejan de tener validez después de un tiempo corto. En los párrafos que siguen mostraré con un ejemplo sencillo qué es la sensibilidad a las condiciones iniciales de un sistema y cómo aparece un comportamiento aparentemente errático y azaroso a pesar de no haber nada aleatorio en el sistema. El ejemplo es artificial y aritmético, pero ilustrativo, ya que sólo requerimos de lápiz y papel; más adelante mencionaré algunos casos realistas.

**Un ejemplo con lápiz y papel**

Antes de entrar en los detalles, recordaré que los números reales representan la posición de un punto a lo largo de una recta continua. En particular, me centraré en los números reales que están entre el 0 y el 1, en el intervalo [0,1], incluyendo ambos extremos. Cualquier número real en este intervalo se puede escribir como $0.\mathbf{a_1 a_2 a_3 a_4}$ ..., donde cada cifra $\mathbf{a_k}$ es un dígito cualquiera: 0, 1, 2, 3..., 9. En esta representación, un número real puede tener una parte decimal finita, periódica, o aperiódica. En el primer caso, a partir de cierto coeficiente todos los siguientes son ceros, los famosos ceros decimales inútiles; un ejemplo es: 5/16=0.312500...=0.3125. El segundo caso corresponde a la repetición infinita de una secuencia (finita) de valores a partir de cierta posición, como en 1/3=0.3333...=$0.\overline{3}$ donde el 3 se repite infinitamente, lo que indicamos con la barra superior sobre el 3. Otro ejemplo más elaborado es 508839/832500=0.6112180180180...=$0.6112\overline{180}$, donde se repite la secuencia 180 infinitamente a partir de la 5a cifra decimal. Ambos son ejemplos de números racionales, o sea, los que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros. El tercer caso corresponde a los números reales cuya parte decimal no muestra una cola de ceros infinita ni tampoco una secuencia de valores que se repite periódicamente. Éstos son los números irracionales, y su parte decimal es una secuencia infinita aperiódica, esto es, donde ninguna subsecuencia se repite de forma periódica infinitamente como en los números racionales. Algunos ejemplos son 1/√2=0.70710678118654752440084436... o el famoso número pi (π=3.14159265358979323846264338...). Hay un número infinito de números racionales e irracionales en el intervalo [0,1], pero es más probable toparse con los números irracionales. Finalmente menciono que el valor 0.9999...=$0.\overline{9}$ es igual a 1 [2].

Como ejemplo consideraremos la evolución temporal dada por $\mathbf{x_{n+1}=10*x_n \bmod 1}$. Esta "ley" describe el cambio en el tiempo de una cantidad que denotamos por $\mathbf{x_n}$, cuyo valor está en el intervalo [0,1], donde el "tiempo" se indica con el subíndice n=0,1,2.... Así, $\mathbf{x_n}$ es el valor al tiempo n, y $\mathbf{x_{n+1}}$ es el valor al tiempo posterior n+1. La función **mod 1**, "módulo 1", significa que al resultado del producto de 10 por $\mathbf{x_n}$ se le debe restar la parte entera, por lo que $\mathbf{x_{n+1}}$ será un número que estará entre 0 y 1. Tenemos, además,

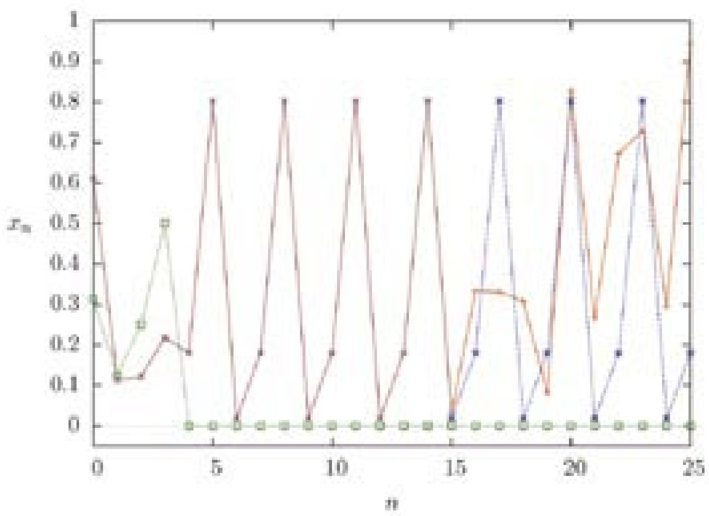


**Figura 1: Evolución temporal del modelo para tres condiciones iniciales: la línea verde (con cuadros) corresponde a la condición inicial $x_0$=0.3125; la línea azul (con asteriscos) a $x_0$=0.6112180, que muestra la repetición periódica a partir de n=4; finalmente, la línea roja (con cruces) corresponde a $y_0$=0.61121801801801803330826729... . El eje vertical representa el valor de $x_n$ mientras que el horizontal representa al tiempo n.**

un aparato que mide una cantidad que nos interesa como función del tiempo; por simplicidad en nuestro ejemplo aritmético consideraremos el valor de la primera cifra decimal de $\mathbf{x_n}$, las décimas, que denotaremos por $\mathbf{d_n}$, donde n denota al tiempo.

Veamos la dinámica que dicha ley impone. Primero, consideremos el valor inicial $\mathbf{x_0}$=0.3125, que es un número racional con una cola de ceros infinita a partir de la 5a cifra decimal. Usando la ley dada arriba tendremos $\mathbf{x_1}$=0.125, ya que 10*$\mathbf{x_0}$=3.125, y la acción de **mod 1** es restar la parte entera del número, o sea, 3. De igual manera tendremos que $\mathbf{x_2}$=0.25, $\mathbf{x_3}$=0.5, y $\mathbf{x_n}$=0 para n=4, 5…; ver la figura 1. Claramente, la dinámica consiste en mover el punto decimal a la derecha, olvidándonos del valor anterior. Nuestro medidor registrará los valores $\mathbf{d_0}$=3, $\mathbf{d_1}$=1, $\mathbf{d_2}$=2, $\mathbf{d_3}$=5, y $\mathbf{d_n}$=0, para n mayor o igual a 4. Si consideramos el valor inicial $\mathbf{x_0}$=0.6112180, es fácil convencerse de que mediremos $\mathbf{d_0}$=6, $\mathbf{d_1}$=1, $\mathbf{d_2}$=1, $\mathbf{d_3}$=2, $\mathbf{d_4}$=1, $\mathbf{d_5}$=8, $\mathbf{d_6}$=0, $\mathbf{d_7}$=1, $\mathbf{d_8}$=8, $\mathbf{d_9}$=0, etc., donde los últimos tres dígitos se repetirán periódicamente. Concluimos que si la condición inicial $\mathbf{x_0}$ es un número racional, la evolución temporal de nuestra medición mostrará eventualmente la periodicidad de la parte decimal o la cola infinita de ceros; si el valor inicial es un número irracional, entonces nuestras mediciones no serán periódicas.

**Ahora, seamos realistas**

Imaginemos ahora la siguiente situación: nos interesa que la dinámica sea periódica, por lo que queremos que nuestra condición inicial sea un número racional, digamos $\mathbf{x_0}$=0.6112180. Sin embargo, a la hora de preparar esta condición inicial, la "cruda realidad" nos impone imprecisiones técnicas y experimentales que hacen que, en lugar de la condición inicial $\mathbf{x_0}$, preparemos un valor muy cercano que denotamos por $\mathbf{y_0}$. Dado que es más probable que un número sea irracional, consideraremos que $\mathbf{y_0}$ es irracional; entonces, su parte decimal es una secuencia aperiódica de dígitos, por lo que a partir de alguna cifra decimal ya no coincidirá con $\mathbf{x_0}$. Como tenemos buena precisión a la hora de preparar la condición inicial, conseguimos tener las mismas primeras 16 cifras, pero no tenemos la seguridad de que las siguientes coincidan. Concretamente, consideraremos que $\mathbf{y_0}$ y $\mathbf{x_0}$ difieren en que, en lugar de tener un 1 en la 17a cifra decimal, tenemos un 3; ver figura 1. La diferencia o "error" inicial es muy pequeño, aproximadamente 2*$10^{-17}$, es decir, 0.00000000000000002...

El carácter determinista de la ley nos permite predecir que la evolución temporal de $\mathbf{x_0}$ será periódica. Sin embargo, lo que medimos es la evolución de $\mathbf{y_0}$; las mediciones correspondientes serán idénticas hasta $\mathbf{d_{15}}$=0, ya que sus decimales coinciden, pero $\mathbf{d_{16}}$=3, en lugar de 1. ¿Qué podemos decir para $\mathbf{d_{17}}$? Nada; el error ha crecido tanto en el tiempo que es imposible hacer predicciones. Para entender esto veamos, como función del tiempo, qué le pasa al "error", que es el valor absoluto de la diferencia, $\mathbf{e_n}=|\mathbf{y_n}-\mathbf{x_n}|$. En un principio el "error" es muy pequeño, $\mathbf{e_0}\approx 2*10^{-17}$. Sin embargo, a medida que el tiempo transcurre el "error" crece en un factor 10, $\mathbf{e_1}\approx 2*10^{-16}$, $\mathbf{e_2}\approx 2*10^{-15}$..., $\mathbf{e_{14}}\approx$0.002..., $\mathbf{e_{15}}\approx$0.02..., $\mathbf{e_{16}}\approx$0.2... Lo dramático del caso es que, a pesar de que la diferencia inicial es ridículamente pequeña, después de cierto tiempo es imposible predecir la evolución de $\mathbf{y_0}$ a partir de la evolución de $\mathbf{x_0}$, ya que el "error" inicial, y que no podemos controlar, crece exponencialmente. Entonces, después de n=16, $\mathbf{y_n}$ puede estar en cualquier lugar del intervalo [0,1], y su evolución ya no estará correlacionada a la de $\mathbf{x_n}$, por lo que nuestro intento de conseguir un movimiento periódico fracasará. De esta forma, a partir de cierto momento, las mediciones de $\mathbf{d_n}$ serán esencialmente aleatorias, a pesar de que no hay nada azaroso en nuestra ley determinista. Este modelo determinista muestra lo que se conoce como sensibilidad a la dependencia de las condiciones iniciales. Hablamos de *caos determinista* cuando la dependencia de las condiciones iniciales es tal que el "error" crece exponencialmente en el tiempo.

**Algunos ejemplos realistas**

El modelo que he usado como ejemplo es totalmente artificial, pero es útil por su simplicidad: después de cada ¿iteración? se pierde un dígito decimal de precisión, lo que aumenta la diferencia entre las cantidades inicialmente cercanas. Este mismo comportamiento se observa en diversas situaciones de interés. Por ejemplo, el famoso mapeo logístico [3], dado por $\mathbf{x_{n+1}=r*x_n*(1-x_n)}$ con $\mathbf{x_n}$ en el intervalo [0,1], es un modelo de crecimiento demográfico de tiempo discreto que también exhibe un comportamiento caótico como el ilustrado, por ejemplo para **r=**4. De hecho, muchos modelos realistas de crecimiento poblacional exhiben el crecimiento exponencial de pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, de la misma manera que ilustramos con el ejemplo anterior. En el libro *Jurassic Park*, que inspiró la película, un pequeño desajuste en la población es la causa de los graves problemas que son la trama de la historia. Otro ejemplo, quizás más cercano, es el juego carambola a tres bandas en el que cuando al cometer un pequeño error, por ejemplo en la dirección del golpe con el taco, se amplifica exponencialmente cuando una bola golpea la superficie esférica de otra, y linealmente al golpear las bandas; si el error inicial es suficientemente grande, fallamos el tiro, esto es lo que hace difícil el juego. Ejemplos menos lúdicos pero importantes son el clima, la dinámica de algunos objetos del Sistema Solar, oscilaciones en reacciones químicas, el tránsito vehicular, el movimiento del polen en el aire. El famoso "efecto mariposa" ilustra cómo pequeñas perturbaciones, como es el aleteo de una mariposa, pueden causar grandes desastres en lugares remotos. Por eso, correcciones a lo largo del tiempo son necesarias cuando se busca un resultado específico, como se hizo durante el descenso del vehículo *Curiosity* en Marte.

La sensibilidad a la dependencia de condiciones iniciales es genérica en sistemas no lineales acoplados, no un artefacto inventado. El punto importante es que la dinámica de sistemas deterministas relativamente sencillos puede ser muy complicada y sensible a las condiciones iniciales, manifestando resultados aparentemente azarosos no necesariamente compatibles con nuestras predicciones. Sin embargo, las limitaciones en la predictibilidad que este comportamiento impone son plenamente consistentes con el carácter determinista de las leyes.


[1] Pierre-Simon Laplace, Introduction, Oeuvres vol. VII, Theorie Analytique de Probabilites (1812-1820).

[2] Ver por ejemplo http://es.wikipedia.org/wiki/0,9_periódico

[3] Ver http://es.wikipedia.org/wiki/Mapa_logístico